ИЗВЕСТИЯ РАН. СЕРИЯ ФИЗИЧЕСКАЯ, 2014, том 78, № 3, с. 316–318

УДК 621.391.266

МОДЕЛЬ БЕРНАСКОНИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

© 2014 г. А. Н. Леухин, А. С. Шувалов, Е. Н. Потехин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Поволжский государственный технологический университет", Йошкар-Ола

E-mail: leukhinan@list.ru

Рассмотрена модель Бернаскони для одномерной цепочки квантовых частиц. Показано, что задача поиска основного состояния такой модели квантовой системы эквивалентна задаче поиска бинарных последовательностей с минимальным уровнем энергии боковых лепестков апериодической автокорреляционной функции (АКФ). Приведены обзор и новые результаты построения таких бинарных последовательностей.

DOI: 10.7868/S0367676514030168

ВВЕДЕНИЕ

В статистической физике широкое применение нашли классические решеточные системы, позволяющие описывать межатомный потенциал с помощью конечного набора значений в точках, задаваемых узлами решетки. Наиболее простая модель – одномерная модель Изинга [1]. В рамках такой модели в каждом узле решетки с номером n спин может принимать одно из двух значений: $s_n = \pm 1$. Рассмотрим одномерную спиновую решетку $\vec{S} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1})$, состоящую из N частиц с одинаковым расстоянием между соседними частицами.

Энергия такой квантовой системы складывается из обменного попарного взаимодействия спинов соседних атомов и взаимодействия спинов с внешним магнитным полем:

$$E(S) = -\sum_{n,\tau} J_{n\tau} s_n s_\tau - \sum_n h_n s_\tau, \qquad (1)$$

где индексы n и τ нумеруют узлы решетки, h_n – значение внешнего магнитного поля на n-м узле, $J_{n\tau}$ – энергия взаимодействия спинов, находящихся в узлах n и τ.

При внешнем магнитном поле $h = 0$ любой энергетический уровень дважды вырожден, так как энергия взаимодействия не изменяется при повороте всех спинов. В простейшем случае энергию взаимодействия можно считать одной и той же для всех пар соседних атомов, т.е. $J_{n\tau} = J$. В результате получим следующую модель энергии квантовой системы:

$$E(S) = -J\sum_{n,\tau} s_n s_\tau. \qquad (2)$$

Бернаскони в работе [2] указал на связь между задачей поиска низкоэнергетических состояний упрощенной одномерной модели Изинга (2) с задачей построения бинарных последовательностей $\vec{S} = (s_0, s_1, \ldots, s_{N-1})$ длины N с низким уровнем автокорреляции.

Апериодическую автокорреляционную функцию $\vec{C} = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ бинарной последовательности можно представить в виде

$$c_\tau = \sum_{n=0}^{N-1-\tau} s_n \cdot s_{n+\tau}, \qquad (3)$$

$\tau = 0, 1, \ldots, N-1$.

В модели Бернаскони гамильтониан квантовой системы простейшей одномерной модели Изинга равен энергии боковых лепестков апериодической автокорреляционной функции:

$$\mathrm{H}(\vec{S}) = \sum_{\tau=1}^{N-1} C_\tau^2. \qquad (4)$$

Таким образом, задача построения простейшей квантовой системы в виде одномерной модели Изинга сводится к задаче построения бинарных последовательностей с наименьшей энергией боковых лепестков.

Существуют два критерия оптимальности бинарных последовательностей, имеющих низкий уровень апериодической автокорреляции. Первый – минимаксный критерий, согласно которому максимальный уровень бокового лепестка PSL

$$PSL(C) = \max_{1 \le \tau \le N-1} |C_\tau| \qquad (5)$$

должен быть минимальным:

$$MPS = \min_S PSL. \qquad (6)$$

Второй критерий – коэффициент MF (merit factor), характеризующий отношение энергии главного отсчета к энергии боковых лепестков апериодической автокорреляционной функции:

$$MF(C) = \frac{N^2}{2\sum_{\tau=1}^{N-1}[C_\tau]^2}. \qquad (7)$$

Оптимальная бинарная последовательность заданной длины N имеет наибольшее значение коэффициента MF.

В общем случае бинарные последовательности оптимальные по этим двум критериям являются различными, но для целого ряда длин они одни и те же. Далее приведем новые результаты в области построения минимаксных оптимальных бинарных последовательностей.

НОВЫЙ ГЛОБАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ПОИСКА

Существуют две группы алгоритмов поиска оптимальных бинарных последовательностей. Локальные алгоритмы имеют производительность, примерно равную $O(1.4^N)$, производительность глобальных алгоритмов поиска примерно $O(1.85^N)$. Несмотря на меньшую производительность, только глобальные алгоритмы гарантируют поиск оптимальной последовательности.

Известны следующие результаты в области построения оптимальных минимаксных последовательностей с использованием глобальных алгоритмов поиска. В работе [3] в 1975 г. был выполнен исчерпывающий поиск минимаксных бинарных последовательностей до длин $N \le 40$. В 1998 г. в [4] этот список был продлен до длины $N \le 48$. В работе [5] был выполнен исчерпывающий поиск бинарных последовательностей для длины $N = 64$. Все авторы данных работ представили таблицы с общим количеством найденных минимаксных последовательностей. В работе [6] в 1997 г. были найдены минимаксные последовательности в диапазоне длин $N = [49;61]$. Но авторы данной работы представили только по одному примеру найденных последовательностей соответствующих длин и не привели количество. В работе [7] в 2013 г. был выполнен исчерпывающий поиск минимаксных последовательностей в диапазоне длин до $N \le 74$ и представлено количество.

С использованием локальных алгоритмов поиска были построены следующие минимаксные последовательности. В работе [8] в 1986 г. найдены бинарные последовательности длин $N = 51, 69, 88$ с уровнем боковых лепестков $PSL = 3, 4, 5$ соответственно. В работе [5] в 2005 г. список бинарных последовательностей с $PSL = 4$ был продлен до длины $N = 70$. В работе [9] в 2008 г. бинарные последовательности с уровнем боковых лепестков $PSL = 4$ были найдены до длины $N = 82$ и с уровнем боковых лепестков $PSL = 5$ для длин $N = [83, 105]$.

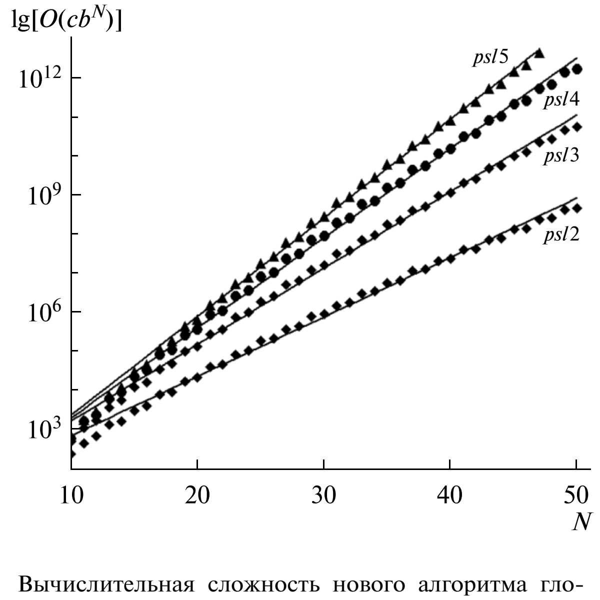
Вычислительная сложность глобального алгоритма поиска бинарных последовательностей с заданным уровнем боковых лепестков

$PSL = 2$	$PSL = 3$	$PSL = 4$	$PSL = 5$
$O(22.9 \cdot 1.42^N)$	$O(19.9 \cdot 1.6^N)$	$O(8.1 \cdot 1.69^N)$	$O(1.79^N)$

Опишем новый глобальный алгоритм поиска минимаксных бинарных последовательностей. Пространство поиска можно уменьшить за счет исключения эквивалентных последовательностей. Существуют три преобразования, сохраняющие значение максимального уровня бокового лепестка: реверсия $R(s_n) = s_{N-1-n}$, изменение знака на противоположный $N(s_n) = -s_n$ и альтернативное изменение знака $S(s_n) = (-1)^n s_n$. Такие последовательности формирую класс эквивалентности.

Основное отличие нового алгоритма глобального поиска заключается в том, что в нем учитывается факт несимметричности отсчетов боковых лепестков и после вычисления значений апериодической АКФ при сдвигах $\tau = N-2, N-3, \ldots, N/2$ вычисляются значения апериодической АКФ при сдвигах $\tau = 1, 2, \ldots, N/2$.

Результаты построения экспериментальной и теоретической вычислительной сложности нового алгоритма поиска минимаксных последовательностей в диапазоне длин $N = [10;50]$ показаны на рисунке. По вертикальной оси в логарифмическом масштабе откладывается число вычислений отсче-



Вычислительная сложность нового алгоритма глобального поиска оптимальных минимаксных последовательностей.

тов апериодической АКФ, по горизонтальной – длина последовательности.

Вычислительная сложность алгоритма полного перебора будет определяться как

$$O\left(\left(N-1\right)\cdot 2^{N}\right), \tag{8}$$

где 2^N – число возможных бинарных последовательностей длины N, $\left(N-1\right)$ – число отсчетов боковых лепестков апериодической АКФ. Таким образом, экспериментальные результаты определения вычислительной сложности будут аппроксимированы законом

$$O(c\cdot b^{N}). \tag{9}$$

Вычислительная сложность алгоритма поиска бинарных последовательностей с уровнем боковых лепестков $PSL = 2,3,4,5$ представлена в таблице.

Для примера приведем наш результат глобального поиска на длине $N = 76$. Общее количество найденных неэквивалентных оптимальных минимаксных последовательностей с $PSL = 4$ равно 18. Среди них бинарная последовательность вида

1 1 –1 1 –1 –1 1 1 –1 –1 1 –1 –1 1 1 1 1 –1 –1 1 1 –1 1 1 –1 –1 –1 1 1 –1 1 1 –1 1 –1 1 –1 1 –1 1 –1 1 1 –1 1 1 1 1 –1 1 –1–1 –1 1 1 1 1 1 1 1 1 –1 –1 –1 1 1 –1 –1 –1 –1 1 –1 –1 –1 –1 1 1

имеет максимальное значение коэффициента $MF = 7.113$.

В то же время при локальном поиске бинарной последовательности с наибольшим значением коэффициента MF на данной длине была найдена бинарная последовательность

1 1 1 1 1 1 1 –1 1 –1 1 1 1 1 1 –1 1 –1 1 –1 –1 –1 –1 1 1 1 1 –1 –1 –1 1 1 1 –1 –1 1 –1 1 –1 1 1 1 1 –1 –1 –1 1 –1 –1 –1 1 1 –1 –1 1 1 –1 1 1 1 1 –1 –1 1 –1 –1 1 –1 –1 1 –1 –1 1 1 –1 1 1

со значением коэффициента $MF = 8.647$ с максимальным уровнем боковых лепестков $PSL = 5$.

Подробную информацию об оптимальных бинарных последовательностях можно найти на тематическом сайте [10].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача построения основных состояний квантовой системы в виде цепочки попарно взаимодействующих спинов длины N. Показано, что, согласно модели Бернаскони, данная задача сводится к задаче построения бинарных последовательностей с наименьшим уровнем энергии боковых лепестков апериодической АКФ. Предложен новый алгоритм глобального поиска оптимальных минимаксных бинарных последовательностей, имеющий вычислительную производительность, сравнимую с вычислительной производительностью глобальных алгоритмов. В качестве примера приводится синтез оптимальных последовательностей на длине $N = 76$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-07-00552.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ising E.* // Z. Phys 1925. № 31. P. 253.
2. *Bernasconi J.* // J. Phys. 1987. V. 48. P. 559.
3. *Lindner A.* // El. Lett. E. 1975. V. 11. № 21. P. 507.
4. *Cohen M.N. et al.* // Proc. IEEE Int. Radar Conf. Arlington. 1990. VA. P. 633.
5. *Coxson G.E. et al.* // IEEE Trans. Aerosp. and El. Syst. 2005. V. 41. P. 302.
6. *Elders-Boll et al.* // IEEE Symp. Comm. and Veh. Tech. Benelux. 1997. P. 24.
7. *Leukhin A.N. et al.* // Proc. IEEE Eur. Radar Conf. Nuremberg. 2013.
8. *Kerdock A.M. et al.* // Proc. IEEE. 1986. V. 74. № 2. P. 366.
9. *Nunn C.J. et al.* // IEEE Trans. Aerosp. and El. Syst. 2008. V. 44. № 1. P. 392.
10. http://signalslab.volgatech.net